Électrocinétique | Chapitre 1 | Correction TD (E1)

Exercice n°1 • Formules de cours *cours*

1) On note R_0 et R_∞ les résistances d'un fil et d'un circuit ouvert, tout en sachant que $R_0 \to 0$ et $R_\infty \to \infty$.

- Une résistance R en série avec un fil...

$$R_{eq} = R + R_0 \to R$$

  est équivalente à une résistance R.
- Une résistance R en parallèle d'un fil

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R \cdot R_0}{R + R_0} \to 0$$

  est équivalente à un fil (une résistance nulle). On dit que la résistance est court-circuité.
- Une résistance R en série avec un interrupteur ouvert...

$$R_{eq} = R + R_\infty \to \infty$$

  est équivalente à un interrupteur ouvert (une résistance infinie).
- Une résistance R en parallèle d'un interrupteur ouvert...

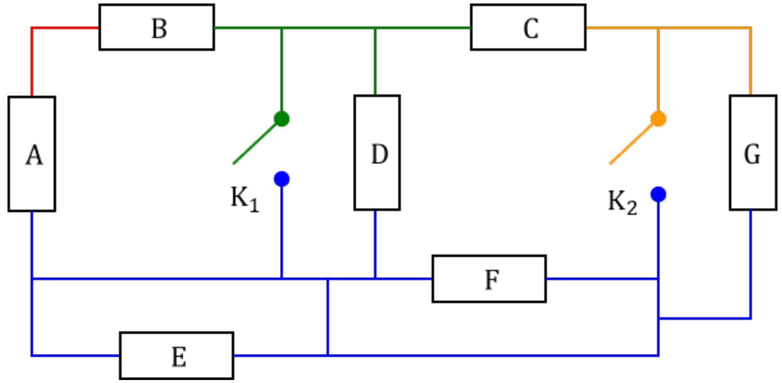
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_\infty} \to \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} \to R$$

  est équivalente à une résistance R.

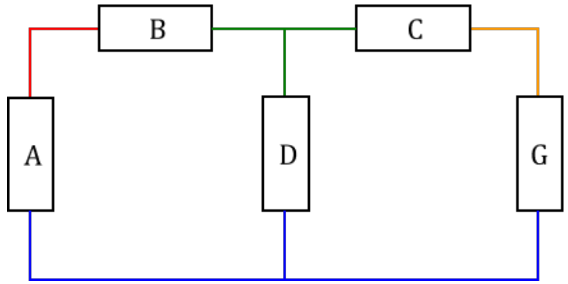
2) Dans l'ordre :

- intensité non nulle dans la branche ;
- intensité nulle dans la branche de la résistance, non nulle dans celle du fil ;
- intensité nulle dans la branche ;
- intensité non nulle dans la branche de la résistance, nulle dans celle du circuit ouvert.

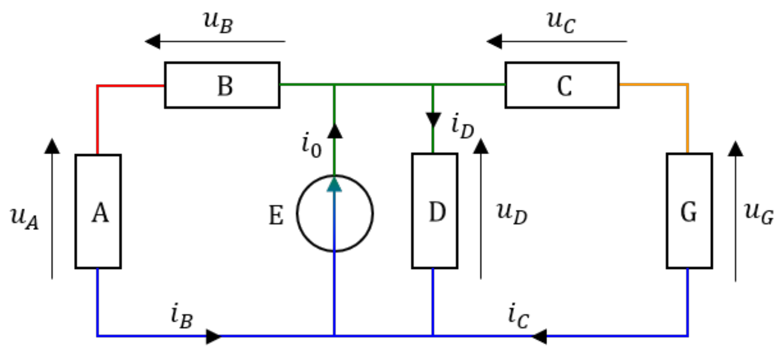
3)



4)



5)



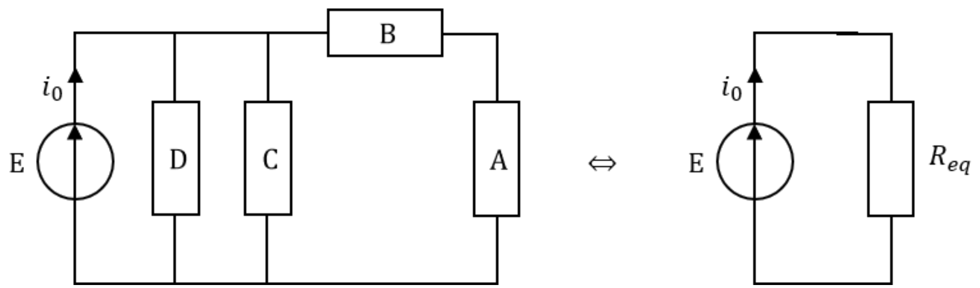
6) Le générateur et D sont en dérivation, ils ont donc la même tension :

$$\boxed{u_D = E}$$

Pont diviseur de tension pour toutes les autres résistances :

$$\boxed{u_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} E \qquad u_B = \frac{R_B}{R_A + R_B} E \qquad u_C = \frac{R_C}{R_C + R_G} E \qquad u_G = \frac{R_G}{R_C + R_G} E}$$

7) Nouveau circuit équivalent :



Résistance équivalente :

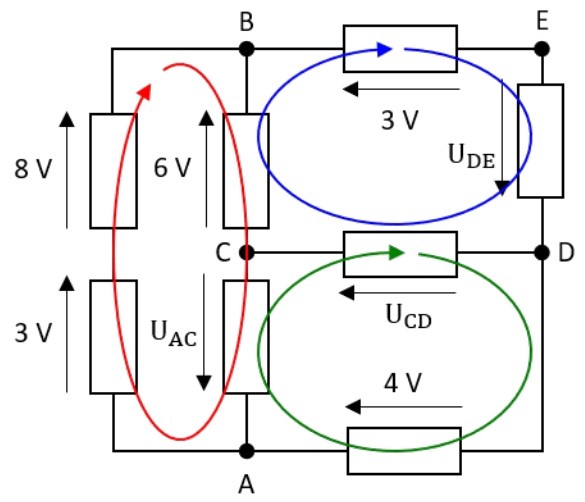
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_A + R_B}$$

On en déduit le courant :

$$\boxed{i_0 = \frac{E}{R_{eq}} = E\left(\frac{1}{R_D} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_A + R_B}\right)}$$

Exercice n°2 • Loi des mailles ★☆☆

On applique la loi des mailles dans les 3 mailles ci-dessous.



Maille rouge :

$$-6 + U_{AC} + 3 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{AC} = -5V$$

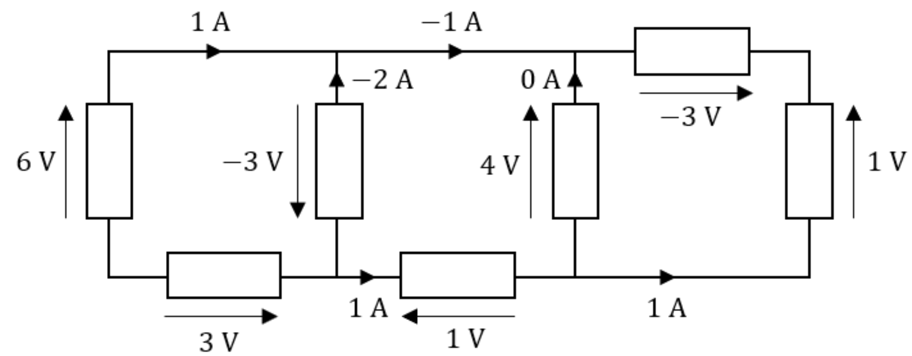
Maille verte :

$$-U_{CD} + 4 - U_{AC} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{CD} = 9V$$

Maille bleue :

$$-3 + U_{DE} + U_{CD} + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{DE} = -12V$$

Exercice n°3 • Lois de Kirchhoff ★☆☆



Exercice n°4 • Topologie des circuits ★☆☆

1) Les points B, E, G = F et H sont des nœuds. Les points A, C, D ne sont pas connectés à 3 dipôles. Les points G et F sont reliés par un fil, il s'agit donc du même nœud.

2) Les branches sont : HAB, BCDE, HG, BG, GE, EF, FH (rappel : G =F).

3) Résistances en série : $R_1 - R_2$, $R_4 - R_5$.

4) Résistances en dérivation : $R_7 \| R_8$.

Exercice n°5 • Diviser pour mieux régner ★☆☆

1) La résistance équivalente du circuit est de $3R$. On en déduit :

$$\boxed{i = \frac{E}{3R}}$$

2) Avec un pont diviseur de tension :

$$\boxed{u = \frac{2R}{R+2R}\,E = \frac{2E}{3}}$$

On peut aussi utiliser le résultat de la question précédente et appliquer la loi d'Ohm :

$$\boxed{u = 2R \times i = \frac{2E}{3}}$$

3) La résistance équivalente du montage vaut :

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{2R}{3}$$

On en déduit :

$$\boxed{i = \frac{3E}{2R}}$$

4) Pour avoir la résistance équivalente du montage, on ajoute R à celle de la question précédente. Ainsi,

$$R_{eq} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5R}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{3E}{5R}}$$

5) On combine les deux résistances qui sont en dérivation : $R_{eq} = \dfrac{2R}{3}$, puis on applique un pont diviseur de tension :

$$\boxed{u = \frac{R_{eq}}{R+R_{eq}}\,E = \frac{2E}{5}}$$

6) On se sert de la question précédente et on applique la loi d'Ohm :

$$\boxed{i = \frac{2E}{5R}}$$

7) La résistance étant en dérivation du générateur, on a immédiatement :

$$\boxed{u = E}$$

8) La résistance $2R$ est court-circuitée, aucun courant ne passe par cette branche. On en déduit :

$$\boxed{i = \frac{E}{R}}$$

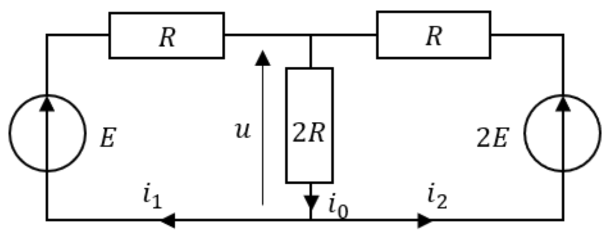
9) Le courant dans la branche de la résistance R est d'intensité nulle du fait de l'interrupteur ouvert. Une loi d'Ohm donne donc :

$$\boxed{u = 0}$$

10) Loi des mailles dans la maille contenant : le générateur, l'interrupteur et la résistance R.

$$\boxed{u = E}$$

11) Aucune association de résistance possible, ni aucun pont diviseur. Il faut nécessairement passer par les lois des nœuds et des mailles.



On a :

$$\begin{cases} i_0 = i_1 + i_2 \\ E = Ri_1 + u \\ 2E = Ri_2 + u \end{cases}$$

On part de la loi d'Ohm sur la résistance $2R$:

$$u = 2Ri_0 = 2R\,(i_1 + i_2) = 2R\left(\frac{E-u}{R} + \frac{2E-u}{R}\right)$$

On en déduit donc la tension recherchée :

$$u = 2\,(3E - 2u) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{6E}{5}}$$

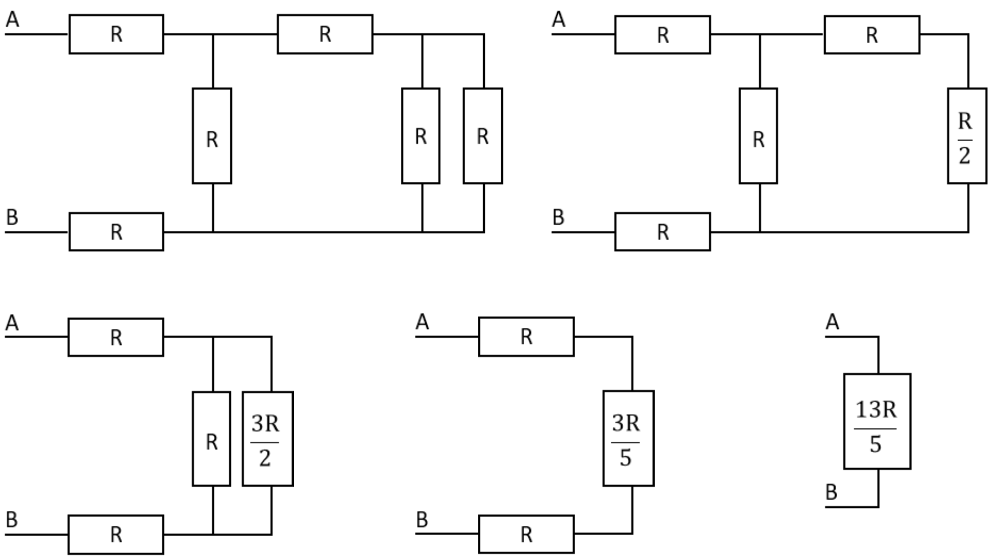
Exercice n°6 • Résistance équivalente ★⯪☆

La notation $\|$ signifie « en parallèle de ».

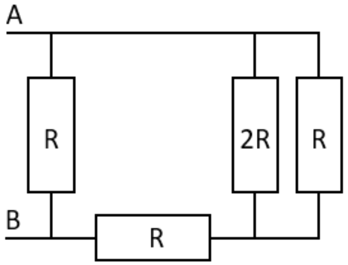
1) On a une résistance R en dérivation avec 3 résistances R en série. Ainsi :

$$R_{eq} = R \parallel 3R = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}\right)^{-1} = \boxed{\frac{3R}{4}}$$

2) On peut réaliser la suite de transformations suivante :

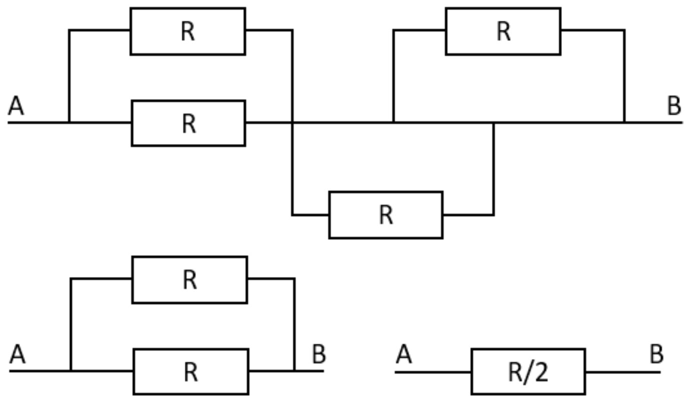


3) On peut réécrire le circuit de la manière suivante. On en déduit la résistance équivalente :



$$\begin{aligned} R_{eq} &= R \parallel (R + (2R \parallel R)) \\ &= R \parallel \left(R + \frac{2R}{3}\right) \\ &= R \parallel \frac{5R}{3} \\ &= \boxed{\frac{5R}{8}} \end{aligned}$$

4) On remarque le fil court-circuite les deux résistances de droite.



Exercice n°7 • Méthode de la tension moitié ★⯪☆

1) Formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{U = \frac{R_v}{r + R_v}E}$$

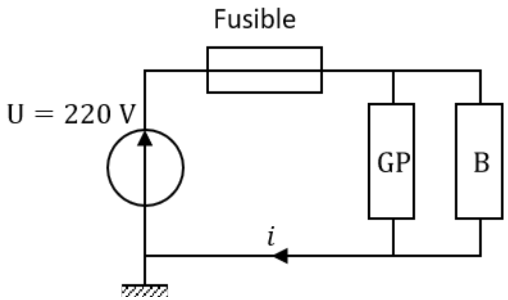
2) On contient une résistance infinie en débranchant la résistance (circuit ouvert). Dans ce cas,

$$U = \lim_{R_v \to +\infty}\left(\frac{R_v}{r + R_v}E\right) = \boxed{E}$$

3) On obtient $U = E/2$ lorsque $\boxed{R_v = r}$.

Exercice n°8 • Utilisation d’une multiprise ★⯪☆

1) Schéma du montage :



2) Le grille-pain (GP) et la bouilloire (B) se comportent tous les deux comme des conducteurs ohmiques. La puissance consommée vaut :

$$\mathcal{P} = UI$$

On en déduit l’intensité dans chaque branche :

$$i_{GP} = \frac{1000}{220} = 4,55 \text{ A} \qquad\qquad i_B = 5,91 \text{ A}$$

L’intensité du courant passant à travers le fusible vaut donc :

$$i = i_{GP} + i_B = 10,45 \text{ A} > 10,0 \text{ A}$$

Non, l’étudiant ne peut pas utiliser de manière simultanée sa bouilloire et son grille-pain.

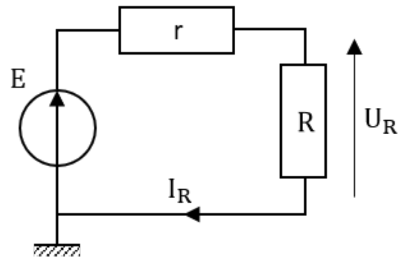
3) On rappelle le lien entre puissance et énergie :

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{P}\, dt$$

La bouilloire consomme donc $\mathcal{E} = 780$ kJ en 10 minutes.

Exercice n°9 • Radiateur ★★☆

1) Schéma du montage :



On a :

$$\boxed{I_R = \frac{E}{r+R}} \qquad\qquad \boxed{\mathcal{P}_R = I_R\, U_R = R\, I_R^2 = R\left(\frac{E}{r+R}\right)^2}$$

2) On cherche la valeur de R qui maximise $\mathcal{P}_R$.

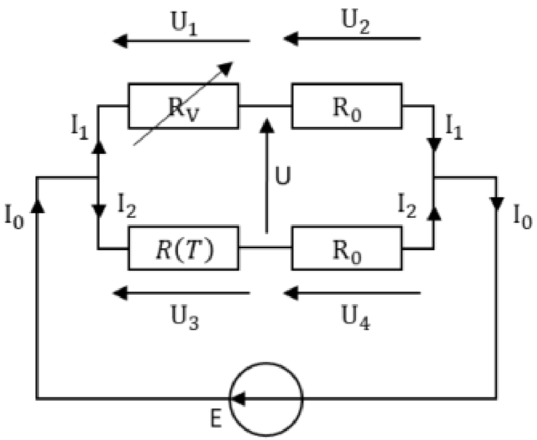
$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}_R}{dR} = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = E^2 \frac{(r+R')^2 - 2R'\,(r+R')}{(r+R')^2} \\
&\Rightarrow \quad 0 = (r+R') - 2R' \\
&\Rightarrow \quad \boxed{R' = r}
\end{aligned}$$

Pour prouver qu’il s’agit bien d’un maximum (et non d’un minimum), on peut comparer par rapport à une autre valeur de R (c’est plus simple que de calculer la dérivée seconde) :

$$\boxed{\mathcal{P}_R\,(r) = \frac{E^2}{4r} > \mathcal{P}_R\,(+\infty) = 0}$$

Exercice n°10 • Pont de Wheatstone ★★★

1) On utilise les notations du schéma ci-après. La loi des mailles donne les deux relations suivantes :



La loi des mailles donne les deux relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
U &= U_3 - U_1 = R(T)\, I_2 - R_v I_1 \\
U &= U_2 - U_4 = R_0 I_1 - R_0 I_2
\end{aligned}
$$

Lorsque le pont est équilibré ($U = 0$), on obtient :

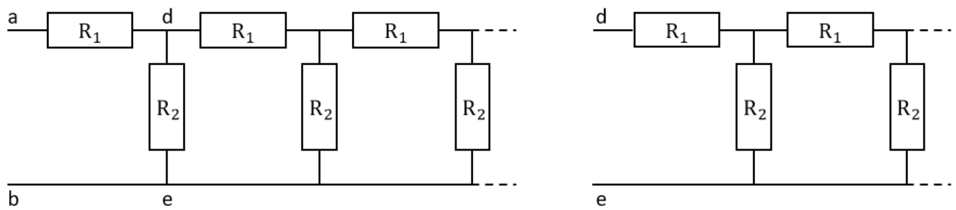
$$R(T)\, I_2 = R_v I_1 \qquad \text{et} \qquad R_0 I_1 = R_0 I_2$$

Ainsi, $\boxed{R(T) = R_v}$.

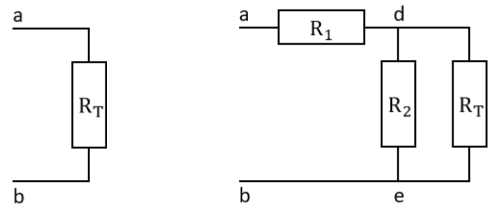
2) Mesurer une résistance à l'ohmmètre nécessite de retirer cette dernière du circuit. Cette méthode permet donc de mesurer une résistance sans ouvrir le circuit.

Exercice n°11 • Modélisation d'une fibre nerveuse ★★★

1) La chaîne étant infinie, les deux circuits ci-dessous sont équivalents.



Ils possèdent donc la même résistance équivalent notée R_T. On peut donc réécrire le montage de deux manière différentes (équivalentes) :



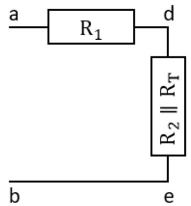
La résistance équivalente entre a et b des deux montages est donc la même. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
& R_T = R_1 + (R_2 \| R_T) \\
\Rightarrow\quad & R_T = R_1 + \frac{R_2 R_T}{R_2 + R_T} \\
\Rightarrow\quad & R_T^2 - R_1 R_T - R_1 R_2 = 0
\end{aligned}
$$

Parmi les deux solutions de cette équation, seule la suivante est positive (et peut donc correspondre à la valeur d'une résistance) :

$$\boxed{R_T = \frac{R_1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}}\right)}$$

2) On applique la formule du pont diviseur de tension dans le schéma équivalent ci-dessous :



$$
\begin{aligned}
V_{de} &= \frac{(R_2 \| R_T)}{(R_2 \| R_T) + R_1} V_{ab} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{(R_2 \| R_T)}} V_0
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$\boxed{\beta = \frac{R_1}{(R_2 \| R_T)} = R_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_T}\right)}$$

3) On a :

$$V_1 = \frac{V_0}{1 + \beta}$$

Par symétrie de translation le long de la chaîne, on a :

$$V_{n+1} = \frac{V_n}{1 + \beta}$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $1/(1+\beta)$. On en déduit :

$$V_n = \frac{V_0}{(1+\beta)^n}$$

4) Sur une distance de 2,0 mm, il y a :

$$N = \frac{2,0 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ cellules.}$$

Ainsi, le potentiel est atténué d'un facteur :

$$\boxed{\frac{V_0}{V_N} = (1+\beta)^N = 35}$$

Exercice n°12 • Alimentation d'une DEL ★★★

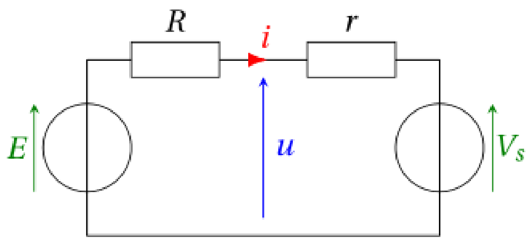
1) Sur la branche bloquée, $i = 0$ pour toute valeur de u. C'est la caractéristique d'un interrupteur ouvert.

2) Un générateur réel de tension est l'association série d'un générateur idéal de fem E et d'une résistance R. La tension délivrée par le générateur vaut : $u = E - Ri$. Sa caractéristique est donc une droite affine de pente $1/R$ et passant par $u = E$ lorsque $i = 0$. C'est bien ce que l'on observe sur la branche passante, avec $\boxed{fem = V_s}$ et la résistance interne $\boxed{r}$.

3) Supposons que la DEL est bloquante. On a ainsi $i = 0$. La loi des mailles donne :

$$E = Ri + u \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = E = 6,0 \text{ V} > V_s}$$

Cela vient contredire l'hypothèse de départ. On en déduit que la DEL est passante. Schéma :



4) La loi des mailles du circuit donne :

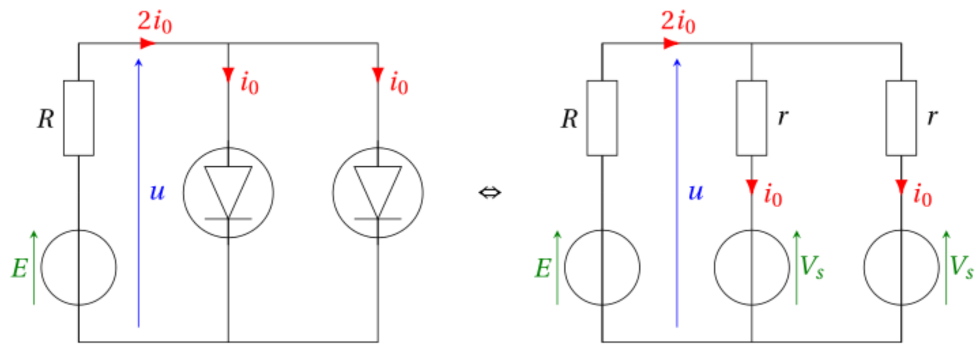
$$E - V_s = (R+r)\,i \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{E+V_s}{R+r}}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{R_0 = \frac{E - V_s}{i_0} - r = 0,28 \text{ k}\Omega}$$

On constante que $\boxed{R_0 \gg r}$. On peut donc négliger la résistance dynamique de la DEL.

5) Les deux branches contenant les photodiodes sont identiques, donc traversées par le même courant i_0. D'après la loi des nœuds, le générateur est traversé par le courant $2i_0$



On a donc :

$$u = E - 2R_0 i_0 = V_s + r i_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_0 = \frac{E - V_s}{2i_0} - \frac{r}{2} = 0,14 \text{ k}\Omega}$$

6) Par définition de la puissance reçue, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_R = R_0\,(2i_0)^2 = 0,12 \text{ W}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_{DEL} = u i_0 = (E - 2R_0 i_0)\, i_0 = 0,027 \text{ W}}$$

7) Par définition de la puissance fournie, on a :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = E\,(2i_0) = 0,018 \text{ W}}$$

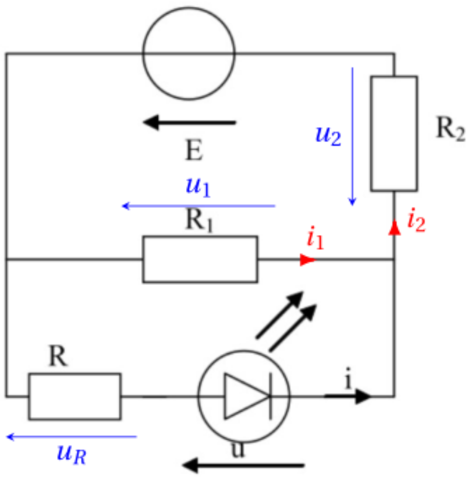
Montrons la relation de conservation de la puissance :

$$\mathcal{P}_R + 2\,\mathcal{P}_{DEL} = R_0\,(2i_0)^2 + 2\,(E - 2R_0 i_0)\, i_0 = 2E i_0 = \mathcal{P}_g$$

La puissance fournie par le générateur est donc également à la somme des puissances reçues par la résistance et par les 2 DEL.

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_R + 2\,\mathcal{P}_{DEL}}$$

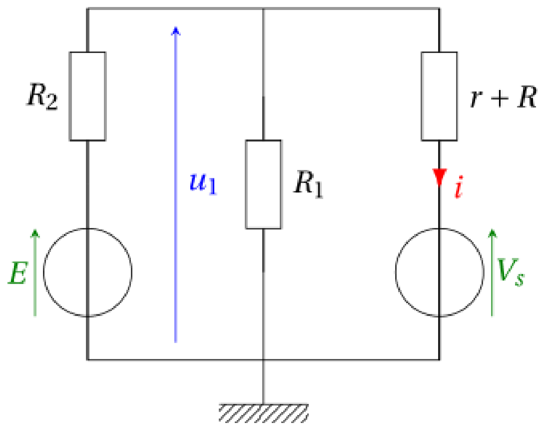
8) On utilise les notations ci-dessous :



On cherche la résistance R_1 minimale permettant à la DEL de fonctionner dans le sens passant. La tension aux bornes de la DEL vaut donc $V_s = u_R + u = u_1$ et elle est traversée par un courant $i = 0$. La loi des nœuds donne ainsi $i_1 = i_2$.
On applique un pont diviseur de tension sur la résistance R_1 (attention ! On peut utiliser le pont uniquement quand $i = 0$, ce qui est le cas ici).

$$V_s = \frac{R_{1,min}}{R_{1,min} + R_2} E \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{1,min} = \frac{V_s}{E - V_s} R_2 = 0,43\,\Omega}$$

9) Schéma :



Loi des mailles : $u_1 = E - R_2 i_2 = R_1 i_1 = V_s + (r+R)\,i$
Loi des nœuds : $i_2 = i + i_1$
On a donc :

$$i = i_2 - i_1 = \frac{E - u_1}{R_2} - \frac{u_1}{R_1} = \frac{E - (V_s + (r+R)\,i)}{R_2} - \frac{V_s + (r+R)\,i}{R_1}$$

Rassemblons tous les termes en i à gauche du signe égal.

$$i\left(1 + \frac{r+R}{R_2} + \frac{r+R}{R_1}\right) = \frac{E}{R_2} - \frac{V_s}{R_2} - \frac{V_s}{R_1}$$

On multiplie par $R_1 R_2$ puis on divise par le parenthèse. On obtient :

$$\boxed{i = \frac{R_1 E - (R_1 + R_2)\,V_s}{(R_1 + R_2)\,(r+R) + R_1 R_2} = 15 \text{ mA}}$$

10) La diode est traversée par le même courant que précédemment, donc elle absorbe la même puissance $\boxed{\mathcal{P}_{DEL} = 27 \text{ mW}}$.
Le générateur fournie une puissance :

$$\mathcal{P}_g = E i_1 = \frac{E}{R_1} u_1 = \frac{E}{R_1}\,(V_s + (r+R)\,i) = \boxed{90 \text{ mW}}$$

Les deux puissances sont du même ordre de grandeur.